1. Végezzük el a függvényvizsgálatot, rajzoljuk le a függvényt! ($x \in \mathbb{R}$)

   a) $a(x) := 2x^2 - x^4$
   b) $b(x) := x + \frac{1}{x^2}$
   c) $c(x) := (x+3)\,\mathrm{e}^{-x}$
   d) $d(x) := 4x^3 - 12x$
   e) $e(x) := x + \frac{1}{x}$
   f) $f(x) := \left(x^2 - 3x + 1\right)\mathrm{e}^x$

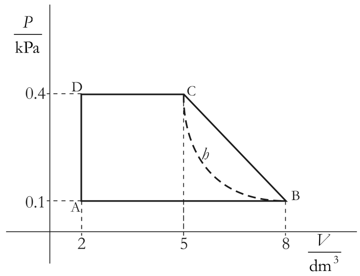
2. Adott az $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ kétváltozós függvény, $f(x,y) = \sin x \cdot \cos y$.

   a) Adjuk meg a függvény x és y változói szerinti parciális deriváltjait!
   b) Írjuk fel a függvényt teljes differenciál formájában!
   c) Adjuk meg a függvény a $\mathbf{v} = (1, 1)$ vektor irányának megfelelő, ún. iránymenti deriváltját az origóban!

3. Oldjuk meg a 2. feladatot a $g(x,y) = \mathrm{e}^{-xy}$ függvényre is!

4. Egy vegyi üzem hetente x hordó nagy tisztaságú metánszulfonsavat $\left(x^3 - 6x^2 + 15x\right)$ ezer € költséggel tud előállítani, és x hordó terméket $9x$ ezer € áron ad el. Számítsuk ki, mekkora legyen az optimális heti termelés a maximális profit eléréséhez! (A profitot definiáljuk mint a bevétel és a kiadás különbségét.)

5. Egy gáz halmazállapotú termodinamikai rendszerről kiderült, hogy annak energiáját bizonyos feltételek mellett az $U = 5\,P\,V + 10\,\mathrm{J}$ egyenlet írja le. A rendszert az ábrán folytonos vonallal szemléltetett módon az A→B→C→D→A cikluson vezetjük keresztül. Számítsuk ki



   a) a rendszer belső energiáját az A, B, C és D pontokban;
   b) a hő és a munka értékét a ciklus négy lépésére;
   c) a hő és a munka értékét arra a folyamatra is, amikor a rendszer az ábrán szaggatott vonallal jelölt h görbe mentén jut el C-ből B-be (a h görbe egyenlete $h : P = \frac{0{,}4\ \mathrm{kPa}}{\frac{V}{\mathrm{dm}^3} - 4}$);
   d) végül adjuk meg az adiabaták parametrikus egyenletét!

6. Egy gáz halmazállapotú termodinamikai rendszer energiáját az $U = 1{,}5\,P\,V$ egyenlet adja meg.

   a) Számítsuk ki a hőt és a munkát arra a folyamatra, amelynek során a rendszer az A állapotból a B állapotba a $P(V) = 0{,}1\ \mathrm{MPa} + 1000\ \mathrm{MPa}\left(\frac{V}{\mathrm{m}^3} - 0{,}02\right)^2$ parabolán végighaladva jut el, és az A állapotot $P_\mathrm{A} = 0{,}2$ MPa nyomás és $V_\mathrm{A} = 0{,}01\ \mathrm{m}^3$ térfogat, a B állapotot pedig $P_\mathrm{B} = 0{,}2$ MPa nyomás és $V_\mathrm{B} = 0{,}03\ \mathrm{m}^3$ térfogat jellemzi!
   b) Adjuk meg az adiabaták (parametrikus) egyenletét a P—V síkon!

Emlékeztetőül.

— *Függvényvizsgálaton* – legalább – azt értjük, hogy a függvény értelmezési tartományának, értékkészletének, zérushelyeinek megállapítása után az első két derivált előjelét megvizsgálva meghatározzuk, hogy a függvény hol monoton, hol konvex, hol vannak lokális szélsőértékei, inflexiós pontjai. Jó, ha ezek ismeretében le is rajzoljuk a függvény grafikonját. A függvényvizsgálat kiterjedhet a függvény korlátosságának, periodicitásának, paritásának, invertálhatóságának és aszimptotikus viselkedésének leírására is.

— Legyen $\mathbf{e}_i$ az i-edik egységvektor $\mathbb{R}^n$-ben. Ekkor az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény *i-edik változója szerinti parciális deriváltja* az $\mathbf{x}_0$ pontban $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0+\lambda\mathbf{e}_i)-f(\mathbf{x}_0)}{\lambda}$, ha ez a határérték létezik. Szerencsés esetben a határérték létezik, és ekkor pl. az $f(x,y)$ függvény x szerinti parciális deriváltját úgy számolhatjuk ki, hogy a függvényt megadó képletben y-t paraméternek tekintjük, és x szerint deriválunk. (Úgy teszünk tehát, mintha y az x szerinti deriválás szempontjából „konstans lenne".)

— Egy $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n-változós függvény *gradiensét* $\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_x}, \ldots \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ alakban, vagyis a parciális deriváltak vektorba rendezésével adhatjuk meg. A függvény *teljes differenciáljának* a $\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i$ alakú kifejezést nevezzük.

— Ha adott egy $f(x,y)$ kétváltozós függvény, amelynek értelmezési tartományán (az (x,y) síkon) ismerünk egy jól határozott P pontot, akkor e pontban a függvény egy $\mathbf{v}$ vektorral egyező irányú *iránymenti deriváltját* a $\mathbf{v_1} \cdot \operatorname{grad} f$ skalárszorzat P pontbeli meghatározásával állapíthatjuk meg. Itt $\mathbf{v_1}$-t a $\mathbf{v}$ vektor 1-re normálásával kapjuk.

— Az itt tárgyaltakhoz hasonlóan egyszerű termodinamikai rendszerekben a belső energia két állapot közötti megváltozása a folyamat során a rendszer által termelt hő és a rendszer által végzett munka összege, vagyis $\Delta U = W + Q$, ahol W a térfogati munkát, Q a hőt jelöli. A térfogati munka egy folyamat során a kezdeti és a végállapot közötti integrálással, $W = -\int P\,\mathrm{d}V$ alakban adható meg. Ez az integrál könnyen ki is számolható, ha P V-től való függése ismert – illetve még könnyebben kiszámolható, ha P egyáltalán nem is függ V-től, ekkor ugyanis egyszerűen $W = -P\Delta V$.

— *Adiabatának* az olyan görbét nevezzük, amelyen végighaladva a rendszer nem cserél hőt a környezetével, vagyis amelyre $Q = 0$. Ilyen egyszerű rendszerek esetén, ahol a belső energia megváltozása kizárólag munkavégzés vagy a környezettel való hőcsere útján mehetne végbe, az adiabatára teljesülnie kell, hogy azon $U(P,V)$ teljes differenciálja azonos a differenciális térfogati munkával ($-P\,\mathrm{d}V$).

Néhány példa megoldása.

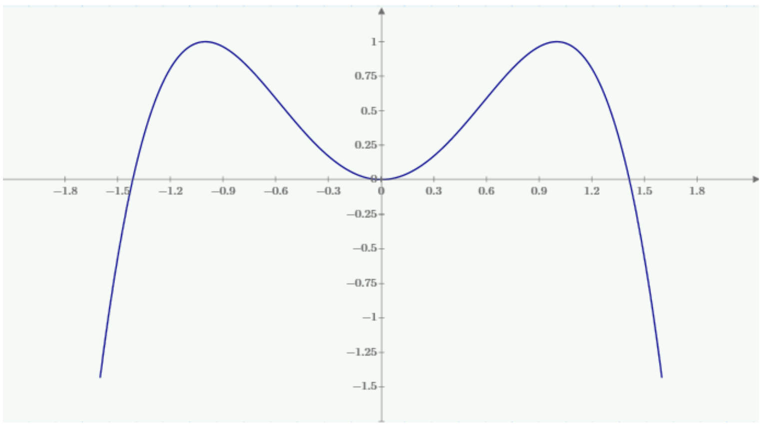
1/a) feladat. A függvény értelmezési tartománya a teljes $\mathbb{R}$ halmaz. A függvény három zérushelyét a $2x^2 - x^4 = 0$ egyenlet megoldásával 0-nál és $\pm\sqrt{2}$-nél találjuk. A függvény első deriváltját felírva $\left(a'(x) = 4x - 4x^3\right)$ megállapítható, hogy

ha $x < -1$, a függvény szigorú monoton növekvő (az első derivált pozitív);
ha $x = -1$, a függvénynek lokális maximuma van (az első derivált zérus, és pozitívból negatívba vált előjelet);
ha $-1 < x < 0$, a függvény szigorú monoton csökkenő (az első derivált negatív);
ha $x = 0$, a függvénynek lokális minimuma van (az első derivált zérus, és negatívból pozitívba vált előjelet);
ha $0 < x < 1$, a függvény szigorú monoton növekvő (az első derivált pozitív);
ha $x = 1$, a függvénynek lokális maximuma van (az első derivált zérus, és pozitívból negatívba vált előjelet);
ha $x > 1$, a függvény szigorú monoton csökkenő (az első derivált negatív).

A második derivált $\left(a''(x) = 4 - 12x^2\right)$ vizsgálatával megállapíthatjuk, hogy

ha $x < -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, a függvény alulról konkáv (a második derivált negatív);
ha $x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, a függvénynek inflexiós pontja van (a második derivált zérus);
ha $-\dfrac{\sqrt{3}}{3} < x < \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, a függvény alulról konvex (a második derivált pozitív);
ha $x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, a függvénynek inflexiós pontja van (a második derivált zérus);
ha $x > \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, a függvény alulról konkáv (a második derivált negatív).

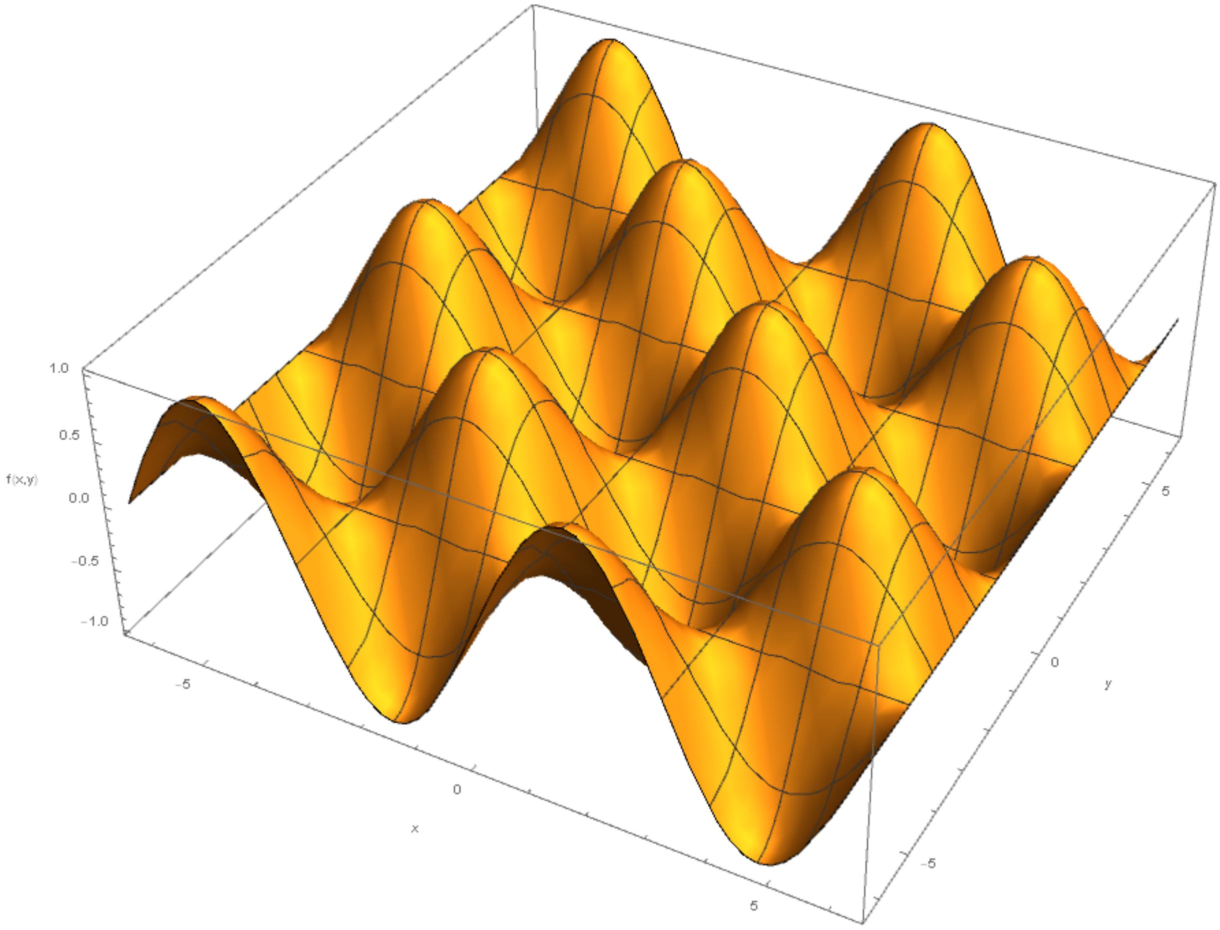
Mindez látható, ha fel is rajzoljuk a függvényt:



Az aszimptotikus viselkedés vizsgálatához határérték-számítást végzünk: $\lim\limits_{x\to-\infty} a(x) = -\infty$ és $\lim\limits_{x\to\infty} a(x) = -\infty$.

Megállapítjuk még, hogy a függvény értékkészlete az $y \leq 1$ halmaz; hogy a függvény globális maximumértéke $y = 1$, és ezt két helyen is felveszi ($x = \pm 1$); hogy a függvény ez alapján felülről korlátos; hogy a függvény páros, hiszen szimmetrikus az x tengelyre; hogy a függvény nem periodikus; illetve, hogy a függvény nem invertálható, hiszen több x helyhez is ugyanazt az y értéket rendeli.

2. feladat. A függvény két változója szerinti parciálisa $\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x \cdot \cos y$ és $\frac{\partial f}{\partial y} = -\sin x \cdot \sin y$. Ebből a teljes derivált $\mathrm{d}\, f = \cos x \cdot \cos y \,\mathrm{d}\, x - \sin x \cdot \sin y \,\mathrm{d}\, y$ alakban írható fel. A $\mathbf{v} = (1, 1)$ vektort 1-re normálva kapjuk, hogy $\mathbf{v_1} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, és így az iránymenti derivált: $\mathbf{v_1} \operatorname{grad} f = \frac{\sqrt{2}(\cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y)}{2}$; ennek origóbeli értéke $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Bár ez a feladat megoldásának nem része, az $f(x,y)$ függvény egy lehetséges ábrázolása az (x,y) sík felett:



5. feladat. Az $U = 5\,P\,V + 10$ J egyenletből, illetve P-nek és V-nek az ábráról leolvasható értékeiből a négy állapotot jellemző belső energiák: $U_\mathrm{A} = 11$ J, $U_\mathrm{B} = 14$ J, $U_\mathrm{C} = 20$ J és $U_\mathrm{D} = 14$ J.

A rendszer A-ból B-be $P_\mathrm{AB} = 0.1$ kPa nyomáson izobár állapotváltozással jut el. A térfogatváltozás erre a folyamatra $\Delta_\mathrm{A}^\mathrm{B} V = 6\ \mathrm{dm}^3$, és így a térfogati munka értéke $W_\mathrm{A}^\mathrm{B} = -P_\mathrm{AB} \cdot \Delta_\mathrm{A}^\mathrm{B} V = -0.6$ J. Mivel ugyanerre a folyamatra $\Delta_\mathrm{A}^\mathrm{B} U = 3$ J, a $\Delta U = Q + W$ egyenletből a hő $Q_\mathrm{A}^\mathrm{B} = 3{,}6$ J.

A B és C állapotok között az egyenes vonalon haladva az állapotváltozás ugyan nem izobár, a munka értéke grafikus integrálással mégis könnyen megállapítható: $W_{\mathrm{B}_\mathrm{egyenes}}^\mathrm{C} = 0{,}75$ J, és az előbbiek szerint számítva a hőt: $Q_{\mathrm{B}_\mathrm{egyenes}}^\mathrm{C} = 5{,}25$ J.

A C és D állapotok között megint izobár állapotváltozással van dolgunk, amelyre a munka $W_\mathrm{C}^\mathrm{D} = 1{,}2$ J, a hő pedig $Q_\mathrm{C}^\mathrm{D} = -7{,}2$ J.

Végül a D és A állapotok közötti állapotváltozás állandó térfogaton történik (izochór), ezért erre a munka $W_\mathrm{D}^\mathrm{A} = 0$, a hő pedig $Q_\mathrm{D}^\mathrm{A} = -3$ J, ez esetben azonos a belső energia-változással.

Hátravan még a munka és a hő meghatározása arra a folyamatra vonatkozóan, amikor a rendszer a C és B állapotok között (nem fordítva!) a h hiperbolán mozog. Ebben az esetben nem kerülhető el a munka integrálással történő meghatározása. Ehhez a $W_{\mathrm{C}_\mathrm{hiperbola}}^\mathrm{B} = -\int_{V_\mathrm{C}}^{V_\mathrm{B}} P(V)\,\mathrm{d}\,V$ integrált kell kiszámítanunk úgy, hogy az itt szereplő $P(V)$ függvény nem más, mint a hiperbola egyenlete. Felidézve, hogy $\int \frac{a}{x-b}\,\mathrm{d}\,x = a \ln{(x-b)}$, az integrálás elvégezhető, és $W_{\mathrm{C}_\mathrm{hiperbola}}^\mathrm{B} = -0{,}5545$ J, valamint $Q_{\mathrm{C}_\mathrm{hiperbola}}^\mathrm{B} = -5{,}4455$ J.

Végül az adiabaták egyenletének megadásához induljunk ki a fundamentális egyenlet teljes deriváltjából: $\mathrm{d}\,U = 5P\,\mathrm{d}\,V + 5V\,\mathrm{d}\,P$, illetve abból, hogy adiabatikus folyamatokra $\mathrm{d}\,U = -P\,\mathrm{d}\,V$. Ebből a $6P\,\mathrm{d}\,V + 5V\,\mathrm{d}\,P = 0$ differenciálegyenlethez jutunk, amelyet a változók szeparálásával integrálhatunk, és így azt találjuk, hogy a differenciálegyenletet a $V^6 P^5 = \mathit{konstans}$ görbesereg elégíti ki. Ez az adiabaták parametrikus egyenlete.